НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ГЕОФІЗИКИ ім. С. І. СУББОТІНА

Дубовенко Юрій Іванович

УДК 550.831

ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТНОЇ ГРАНИЦІ ЗА ЗНАЧЕННЯМИ ПОХІДНИХ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ НА ІСТОТНО ОБМЕЖЕНИХ МНОЖИНАХ

(ЛІНЕАРИЗОВАНА ПОСТАНОВКА)

04.00.22 – Геофізика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2005 р.

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі глибинних процесів Землі і гравіметрії
Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна Національної академії наук України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
ЧОРНИЙ Арнольд Володимирович
Інститут геофізики, головний науковий співробітник

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
КОРЧАГІН Ігнат Миколайович,
Інститут геофізики, провідний науковий співробітник

кандидат фізико-математичних наук,
ПЕТРОВСЬКИЙ Олександр Павлович,
науково-технічна фірма „Біпекс Лтд”, директор,
старший науковий співробітник

Провідна установа: Національний гірничий університет МОН України,
кафедра геофізики, м. Дніпропетровськ.

Захист відбудеться “ ” “ ” 2005 р. о годині
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.200.01 при Інституті геофізики
ім. С. І. Субботіна НАН України за адресою: 03680, Київ-142, пр. Палладіна, 32.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту геофізики
ім. С.І. Субботіна НАН України.

Автореферат розісланий “___” “ __________________ ” 2004 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор геологічних наук М.І. Орлюк

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При регіональних та детальних пошукових роботах в осадових басейнах одним з етапів кількісної інтерпретації геофізичних даних є побудова контактної гравітуючої поверхні. Математично розв'язання таких задач зводять в підсумку до розв'язання оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні. Через використання гармонічних наближень реального розподілу сили тяжіння сфера застосування цих задач обмежується областями малої міри з неглибоким заляганням джерел. Це звужує клас моделей, для яких можливе адекватне вирішення оберненої задачі.

В царині контактних задач з часів постановок Нумерова (перша постановка у вигляді нелінійного інтегрального рівняння) та Заморєва (точне обернення оператора рівняння в комплексній області за умови, що контактна границя є скінченною ундуляцією прямої на обмеженому інтервалі) користуються побудовами, які залежать окрім надлишкової густини від *середньої глибини* до контакту. Зауваження Шванка, яке дозволяло позбутись залежності від глибини h, пройшло повз увагу геофізиків – наявна бібліографія свідчить про наближену "лінеаризовану" трактовку контактної задачі у стилі Заморєва. Крім того, окреслений Нумеровим клас функцій, на якому розв'язок нелінійного інтегрального рівняння контакту апроксимується розв'язком лінійного рівняння, не забезпечує однозначного вирішення задачі. Другий етап розвитку теорії плоскої задачі гравіметрії, зосереджений на дослідженнях в комплексній площині, теж не вирішив усіх проблем, що існують у сфері єдиності розв'язків через відсутність (локальних) компактних класів єдиності розв'язків задач з цілком неперервними операторами, заданими на нескінченному інтервалі. Пошук обмежень на розв'язки, які б забезпечили їх єдиність та стійкість, актуальний і нині.

Досі теорію визначення контакту двох середовищ з постійною густиною розглядають із вхідними даними в континуальній області, а на практиці вхідні дані отримують із вимірів певних компонент поля на *істотно коротких* профілях. Зростання вимог до точності інтерпретації аномалій спонукає до розвитку відповідного цій практиці теоретичного підґрунтя, а становлення "зрілої комп'ютерної епохи" в інтерпретації геофізичних полів робить актуальним створення програмного забезпечення

Зв'язок роботи з науковими планами. Дисертація виконана в Інституті геофізики ім.. С.І. Субботіна НАН України у відділі глибинних процесів Землі і гравіметрії в рамках тем „Гранична задача про відновлення потенціалу за модулем його градієнта та її використання в геодезичній гравіметрії і в теорії інтерпретації гравітаційних і магнітних аномалій" (№ держ. реєстр. 0196U004773) та „Класи єдиності розв'язку обернених задач теорії потенціалу" (№ держ. реєстр. 0101U000286).

Мета і задачі роботи. Розробка основ "лінеаризованої" постановки оберненої структурної задачі логарифмічного потенціалу в класі неперервних, разом з першими похідними, функцій для гра-

ниці поділу однорідних пластів різної густини за умов задання вхідних даних на *істотно обмежених* множинах та розробка дієвих алгоритмів їх чисельного розв'язання в локальній області. Для досягнення поставленої мети були сформульовані такі основні завдання досліджень:

1. Визначення інтегральних співвідношень для "*лінеаризованої*" оберненої задачі структурної гравіметрії та класу єдиності її розв'язків за умов збурених похибками вхідних даних у рамках теорії наближеного вирішення умовно коректних задач.

2. Аналіз характерних властивостей "*лінеаризованого*" інтегрального рівняння для контакту, яке дає розв'язок оберненої задачі, узгоджений з даними про похибки вхідних даних та з'ясування необхідних і достатніх умов однозначного розв'язання задачі в аналітичному вигляді за малих збурень.

3. Реконструкція пропозицій Малкіна, Сенька і Андреєва щодо уточнення наближень Нумерова на базі сучасних уявлень про розв'язання некоректних задач. Розробка стійких регуляризуючих алгоритмів розв'язання задачі на основі ітераційних процесів Андреєва, Лаврентьєва, Чорного для неперервного поля, заданого як на *необмежених* так і *обмежених* множинах.

4. Розробка алгоритмів, позбавлених залежності розв'язку від деякої *середньої глибини* до поверхні контакту і програмного забезпечення для пп. 5-6 та перевірка його якості і надійності на тестових даних, вивчення впливу похибок методу і вхідних даних на точність відновлення контакту.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

- запропоновано нову постановку задачі для контактної поверхні, яка розширює можливості інтерпретації даних гравіметрії в рамках плоскої теорії потенціалу;
- вперше отримано ряд нових лінеаризованих рівнянь 1-го роду, які пов'язують задану функцію контакту двох необмежених однорідних пластів з вертикальною похідною потенціалу сили тяжіння. Їх узагальнені аналоги позбавлені параметричної залежності від *середньої глибини* до контакту
- визначено умови коректного вирішення отриманих розв'язків інтегральних рівнянь за різних умов задання вхідних даних. Удосконалено способи Малкіна, Сенька та Нумерова-Маловичка для уточнення лінеаризованих наближень контакту відповідно до постановки задачі;
- запропоновано відповідні стійкі швидкозбіжні ітераційні процеси пошуку наближених розв'язків рівнянь для контакту на базі теорії узагальнених функцій та еквівалентних перетворень і досліджено їх збіжність;
- створено регулярні чисельні алгоритми на основі вищезгаданих ітерацій з типовими обмеженнями на параметри середовища і поля.

Достовірність та обґрунтованість розробок підкріплено ретельним і строгим теоретичним аналізом математичної моделі і методології вирішення поставленої задачі за допомогою методів фун-

кціонального аналізу, теорій потенціалу, узагальнених функцій та розв’язку некоректних задач. При викладенні отриманих результатів використано достовірні положення обчислювальної математики, методик програмування й інтерпретації геофізичних полів, апробовані результати попередніх досліджень в цій області. Достовірність результатів обґрунтовано їх співставленням з раніше відомими для даного класу задач та апробацією на комплексі тестових прикладів.

Практичне значення роботи полягає в теоретичному обґрунтуванні лінеаризованого інтегрального зображення контактної задачі (має загальнометодологічне значення) та в поповненні арсеналу технології підбору програмним пакетом регуляризованих алгоритмів для надійного виділення контактних границь однорідних середовищ за полем, заданим на *істотно обмежених* інтервалах.

Особистий внесок автора. Самостійно отримано результати, що описані у всіх розділах, за винятком аналізу моделей середовища та ітераційних процесів для обчислення наближень контакту за полем, заданим на довгих профілях, дослідження їх властивостей та умов існування розв’язку задачі, запозичених з попередніх публікацій А.В. Чорного. Питання дискретизації рівнянь і побудови регуляризуючих алгоритмів розвинуто на основі спільних з ним публікацій. Програмна реалізація, тестові обчислення і аналіз повністю здійснені автором.

Апробація результатів дисертації. Положення досліджень, що несуть основне смислове навантаження та результати чисельного моделювання, доповідались на 28-й сесії Міжнародного семінару ім. Д.Г. Успенського “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей” (м. Київ, 29 січня – 2 лютого 2001 р.), ІІ-й Міжнародній конференції для молодих вчених “Геофізичний моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану геологічного середовища” (Київ, 8–10 жовтня 2001 р.).

Публікації. Основні положення дисертації опубліковано в 4 статтях у фахових журналах та двох збірках тез (з них одна стаття і обидві тези написані автором особисто).

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновку, переліку використаної літератури, бібліографічного коментаря та двох додатків. Загальний обсяг роботи 200 сторінок, в тому числі 167 найменувань літературних джерел, 30 малюнків та 3 таблиці, обсяг додатків – 26 сторінок. Наукові інтереси автора формувались протягом 1996-2003 р.р. в процесі плідної співпраці з науковим керівником А.В. Чорним, якого автор шанує як вчителя і щиро вдячний йому за діяльну участь і цінні поради на усіх етапах роботи, що допомогло автору вийти за межі власних пристрастей та інтересів. Автор висловлює глибоку вдячність академіку НАН України *В.І. Старостенку* за увагу і всебічну підтримку, складає щиру подяку докт. фіз.-мат. наук *В.М. Шуману*, *І.М. Корчагіну* та канд. фіз.-мат. наук *А.М. Тупчієнку* за консультації на заключному етапі, а також канд. фіз.-мат.

наук *О.В. Легостаєвій*, канд. геол.-мін. наук *Т.П. Єгоровій* і наук. співр. *К.П. Барановій* за щире ставлення та сприяння у підготовці цієї праці. Окремо виношу подяку сім'ї та любій дружині *Владиславі* за розуміння і терпіння.

ЗМІСТ РОБОТИ

1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ

Як засіб дослідження внутрішньої будови Землі сформульовано математичну модель задачі на основі інтегрального подання фундаментального закону взаємодії поля і середовища. Дано детальний аналіз наявних математичних моделей оберненої задачі для контактної поверхні. Виявлено, що рівняння Нумерова і Заморєва, попри зовнішню схожість, математично відтворюють *суттєво різні* предметні моделі. Кожне з інтегральних рівнянь, що відповідало тій чи іншій моделі, виявилось однаково залежним від *двох параметрів:* надлишкової густини σ і сталої товщини (асимптоти) *h* шару. Неадекватність такого опису моделі залишає простір для вдосконалення. За предметну модель задачі обрано найпростішу геологічну модель з двох горизонтальних, необмежених, складених породами постійної густини $\sigma_i,\ i=1{,}2$ деформованих пластів, що залягають один над одним. Між пластами задано перепад густини $0<\sigma=\sigma_2-\sigma_1$. Позначмо через $\overline{D_i}=D_i\cup\partial D_{i,}\ i=1{,}2$ необмежені замкнуті області, що містять тяжіючі маси й занурені в евклідовий простір $R^{(3)}$. Нехай границі ∂D_i цих областей тотожно співпадають з крівлями першого і другого пластів; тоді гравітаційний вплив такої моделі буде еквівалентним ефекту від області $D=D_1\setminus D_2$ або області D_2 з розподілом мас густиною σ^- чи σ^+. Вважаємо, що границя $\partial D=\partial D_1\cup\partial D_2$ області D кусково-неперервна, її складові ∂D_i – досить гладкі, а сама область досить мала за розмірами, щоб задовольняти умові гармонічної апроксимації потенціалу:

$$\max_{x\in D}\left|\frac{\partial W(x)}{\partial\nu}-\frac{\partial W(x)}{\partial x_2}\right|\le\varepsilon>0,$$

де $W(x)=W(x;\sigma_n,D)$ – збурюючий потенціал сили тяжіння; $\nu=\nu(x)$ – внутрішня нормаль до поверхні рівня $U(x;\sigma_0,D_0)$ нормального потенціалу $U(x)$ у точці *x*; мале число ε – точність гармонічної апроксимації аномалії. Систему координат $Ox_i,\ i=\overline{1,3}$ орієнтовано так, що вісь Ox_3 спрямована в напрямку тяжіючого шару, а площина Ox_1x_2 щонайліпше апроксимує поверхню ∂D_1. Площина $x_3=0$ апроксимує поверхню ∂D_1 і є її рівнянням на тій підставі, що відомими редукціями завжди можна звести виміряні значення сили тяжіння на рівень моря. Нехай складову ∂D_2 границі ∂D області D добре апроксимує циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі Ox_2, а функція $\sigma(\xi),\ \xi\in D$ розподі-

лу густин тіл в D не залежить від координати ξ_2. Тоді границею контакту є направляюча $\zeta = \zeta(\xi_1)$, $\xi_1 \in R^{(1)}$ циліндричної поверхні ∂D_2, яка є простою, без самоперетинів гладкою кривою $\zeta(\xi_1)$. Функції контакту відділені від земної поверхні: $0 < h_1 \le \zeta(x) \le h_0, -\infty < x < \infty$.

Для плоскої контактної задачі на основі введеної моделі середовища справедливе рівняння, що пов'язує параметри (σ, ζ) середовища й поля

$$U_{x_k}(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_k} = 2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_0^{\zeta(\xi_1)} \sigma(\xi_1) \frac{\xi_k - x_k}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} d\xi_2 \, . \tag{1}$$

Збудувати модель оберненої задачі для контакту безпосередньо на основі логарифмічного потенціалу неможливо через розбіжність інтегралу, який його зображує. Загалом таку задачу зведено до розв'язання нелінійного рівняння

$$\zeta(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)} d\xi = u(x), \; u(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial U(x,0)}{\partial x_2} \tag{2}$$

із значеннями поля, заданими на необмеженій множині. Лінеаризовану постановку контактної задачі характеризують два припущення: – *коливання контакту малі порівняно з глибиною його залягання*; – *нелінійна частина за своїм вкладом менша від точності спостережень.* Клас єдиності розв'язків лінеаризованої задачі характеризує множина $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$ неперервних за Гельдером разом із своїми 1-ми похідними на смузі $D = \{< x, \zeta >; -\infty < x < \infty; \, h_1 < \zeta(x) \le h_0\}$ функцій, які задовольняють умовам

$$\omega(\zeta) < \zeta(x), \, x \in R^{(1)}, \; 0.6h \le |\zeta(x)| \le 1.4h, \; 0 < h^- \le h \le h^+, \tag{3}$$

де $\omega(\zeta) = h^+ - h^-$ – "коливання" функції $\zeta(x)$, $x \in R^{(1)}$, $h^- = \inf \zeta(x)$, $h^+ = \sup \zeta(x)$ – глобальний мінімум і максимум функції $\zeta(x), -\infty < x < \infty$, $h^- \le \zeta(x) \le h^+$. Клас Нумерова $Nu^{(k,\alpha)}(\sigma, D)$ є декартовим добутком множини $S_{loc}(D)$ обмежених і (майже всюди) локально інтегрованих функцій, що описують густину $\sigma = \sigma(x, y)$, $(x, y) \in D$ мас в області $D \subset R^{(2)}$ та сукупності $C^{k,\alpha}(R^{(1)})$, $k = 0,1,...,$; $0 < \alpha \le 1$ функцій $y = \zeta(x)$, $x \in R^{(2)}$ неперервних (за Гельдером) з їх похідними до k-го порядку включно з показниками α, що описують контакти різнорідних шарів зі смуги $D = \{(x, y): \, -\infty < x < \infty; \; 0 < \zeta(x) \le h_0\}$, h_0 – обмежена стала. Головну роль в обґрунтуванні апроксимації нелінійного рівняння (2) деяким лінійним оператором на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$ відіграє така теорема.

Теорема Нумерова. *Для контактних границь, які описуються функціями* $\zeta(x), x \in R^{(1)}$ *з класу Нумерова* $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$, *головну роль в гравітаційному тяжінні підземних мас відіграє перша складова у лівій частині рівняння* (2)*, а друга слугує деякою малою поправкою до неї.*

Висновок 1. У класі функцій $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ нелінійне інтегральне рівняння (2) 1-го роду можна замінити з точністю до квадрату ухилення $\zeta(\xi,x)=\zeta(\xi)-\zeta(x)$ лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма 1-го роду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}\zeta(\xi,x)d\xi=v(x),\ v(x)=u(x)-\zeta(x),\ x\in R^{(1)}=(-\infty,\infty). \tag{4}$$

Обравши у (4) замість визначеного у фіксованій точці x значення $\zeta(x), x\in R^{(1)}$ будь-яке інше, скажімо, значення $\zeta(y)=h$, $h^-\le h\le h^+$ при $y\ne x$, отримаємо нове лінійне рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\zeta(\xi,h)d\xi=v(x),\ \zeta(\xi,h)=\zeta(\xi)-h,\ v(x)=u(x)-h. \tag{5}$$

Рівняння (4), (5) містять повільно спадаючі при $|\xi-x|\to\infty$ ядра Пуассона. Для забезпечення задовільної точності розв'язків потрібно задавати функцію $u(x)$ на "майже нескінченній" множині, а виміряне поле $u(x)$ отримане на *істотно коротких* профілях. Для подолання цієї вади є альтернатива:

$\to$ здійснити високоточну екстраполяцію значень $u(x)$ з *короткого* на *довгий* інтервал, після чого обчислити наближений розв'язок рівняння;

$\to$ знайти еквівалентне початковому рівнянню перетворення з швидко спадаючим ядром, яке дозволить на *коротких* інтервалах точно обчислити деяку допоміжну функцію, яка забезпечить визначення наближення заданого рівняння з ґарантованою точністю.

Поняття істотно короткого профілю введено з таких міркувань. *Нехай потрібно визначити в рівномірній дискретній мережі точок* x_k *з постійним кроком* Δx *деякий фрагмент контактної поверхні* $\zeta(x)$ *на інтервалі* $[c_1,c_2]$ *за виміряними в інтервалі* $[c_0,c_3]\supset[c_1,c_2]$ *з відомою точністю* δ, $\|u(x)-u_\delta(x)\|_c\le\delta$ *значеннями поля* $u_\delta(x)$. Певне наближення фрагменту $\zeta(x), x\in[c_1,c_2]$ шукають за допомогою ітерацій для рівняння (2). Для дискретного алгоритму обчислюють таке значення границі інтегрування a_m, при якому сумарна похибка апроксимації прямого оператора та похибка чисельного інтегрування не перевищує величини, кратної похибці поля $\|\varepsilon(x;n)\|+\|\varepsilon(x;a)\|\le l\delta,\ l\le 5$. Якщо при цьому значення поля $u_\delta(x)$ задано на інтервалі $[c_0,c_3]$ так, що $[c_0-a_m-\Delta x/2, c_3-a_m-\Delta x/2]\ge[c_1,c_2]$, то інтервал називають *майже необмеженим*, в іншому разі – *істотно обмеженим*.

Для реалізації останнього підходу шляхом перетворень над дійсною частиною інтеграла Шварца отримано кілька конструкцій з ядрами, що швидко спадають. Наведемо дві з них

$$K_1(x_i,h)=\frac{\Delta t}{4\pi}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi t_j}{2h}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{h^2+(x_i-t_j)^2}+\frac{1}{(x_i+t_j)^2+h^2}\right),\ n_1=\operatorname{int}\left(\frac{2h\alpha_0}{\pi\Delta t}\right),$$

$$K_2(x_i,h)=\frac{\Delta t}{\pi}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\cos x_i t_j}{1+e^{2ht_j}},\ n_2=\operatorname{int}\left(\frac{\alpha_0}{2h\Delta t}\right), \tag{6}$$

де Δt – крок чисельного інтегрування. Застосування подібних конструкцій для відновлення контакту за умов задання поля на істотно обмежених множинах обґрунтовує така теорема. Нехай $S^+(x,h)$ та $S^-(x,h)$– півсума і піврізниця функцій $u(x,-h)$ і $u(x,h)$.

Теорема 1. *Якщо розв'язок* $\zeta(x)$ *нелінійного інтегрального рівняння* (2) *для контактної поверхні належить до* $Nu_2^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то функція* $\zeta(x,h)=S^+(x,h)+S^-(x,h)$, *що визначається як сума розв'язків лінійних інтегральних рівнянь 1-го роду*

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^+(t,h)\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(t-x)}{2h}\right)^{-1}dt=u(x,0),\ \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S^-(t,h)\cdot\operatorname{th}\frac{\pi(t-x)}{2h}dt=u(x,0), \tag{7}$$

при $t=\xi$, *відрізняється від розв'язку* $\zeta(x)$ *не більше, ніж на квадрат відхилення* $\zeta(x,h)=\zeta(x)-h$, $x\in R^{(1)}$, $h^-\le h\le h^+$.

Але можна визначити контакт $\zeta(x,h)$ на короткому відрізку, виходячи лише з одного рівняння.

Висновок 2. Якщо розв'язок $\zeta(x)$ нелінійного інтегрального рівняння (2) належить до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, то його лінійне наближення $\zeta(x,h)$ визначається з точністю до квадрату відхилення $\zeta(x,h)=\zeta(x)-h$, $h^-\le h\le h^+, x\in R^{(1)}$, як розв'язок лінійного інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду:

$$\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\zeta(\xi,h)d\xi=w(x),\ w(x)=v(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2kh}{(\xi-x)^2+(2kh)^2}v(\xi)d\xi\,. \tag{8}$$

Ще один альтернативний шлях для визначення лінійного наближення $\zeta(x,h)$ дає вираз

$$\zeta(x,h)=2S^+(x,h)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\cdot v(\xi)d\xi\,, \tag{9}$$

де функція $S^+(x,h)$ визначається з першого рівняння системи (7). Ця система забезпечує найточніші розрахунки контакту на короткому профілі. Виведено узагальнені аналоги цих виразів.

Теорема 2. *Якщо розв'язок* $\zeta(x)$ *нелінійного інтегрального рівняння* (2) *для контактної поверхні належить класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то функція* $\zeta^-(x)=S^+(x)+S^-(x)$, *яка визначається як сума розв'язків лінійних інтегральних рівнянь 1-го роду*

$$\frac{1}{2\zeta(x)}\int_{-\infty}^{\infty} S^{+}(\xi)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1} d\xi = u(x),\ \frac{1}{2\zeta(x)}\int_{-\infty}^{\infty} S^{-}(\xi)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)} d\xi = v(x), \qquad (10)$$

відрізняється від розв'язку $\zeta(x)$ *не більше, ніж на квадрат відхилення* $\zeta(\xi,x)=\zeta(\xi)-\zeta(x), \xi, x\in R^{(1)}$.

Властивості лінійних операторів системи (10) характеризує така теорема.

Теорема 3. *Якщо функція контакту* $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то лінійний інтегральний оператор* $u=A^{S}(\zeta)$ *задачі* (7) *обмежений, неперервний і компактний у просторах* $C(R^{(1)})$, $L^{(m)}(R^{(1)}), m=1,2$. Аналогічний результат справедливий і для операторів (4), (5). Множину *допустимих розв'язків* лінеаризованої контактної задачі характеризують такі обмеження:

1) контактна границя в *n* точках, гладка за умовою $|\zeta(x)-\zeta(x+n\cdot\Delta x)|\le\omega(\zeta)$ на будь-якому відрізку $c_1,c_2 \subset c_0,c_3$ з постійним кроком Δx;

2) у точках профілю $x_j,\ j=1,2,..M$ відомі оцінки глибини занурення контакту $\zeta(x_j)\ge h_j$;

3) апріорі обрано гіпотетичні оцінки $\zeta_{\max}(x)$ і $\zeta_{\min}(x)$, $\zeta_{\min}\le\zeta(x)\le\zeta_{\max}$, $x\in[c_0,c_3]$;

4) контактна границя розділяє два однорідні середовища з відомим перепадом густин $\sigma=\sigma_1-\sigma_2$;

5) спостережені в *m* точках значення поля $\bar{u}(x_i)=u(x_i)+\delta u_i$, $i=\overline{1,N}$ містять випадкову похибку заданої інтенсивності $\|\delta u\|_{L_2}\le\delta$; $\bar{u}(x_i)\in[c_0,c_3]$.

2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ПОЛЕМ, ЗАДАНИМ НА НЕОБМЕЖЕНІЙ МНОЖИНІ

Викладено методи ітераційного розв'язання лінійних рівнянь для контакту за умов "континуального" задання поля та їх узагальнених модифікацій, незалежних від апріорі невідомого параметра *h*, дано аналіз їх збіжності на основі певних еквівалентних перетворень, наведено оригінальний алгоритм екстраполяції поля при відновленні контакту за традиційною схемою з ядром Пуассона. Довжину профілю, необхідну для відновлення з гарантованою точністю аномального контакту, оцінимо так: поле на ділянці $l=m\Delta x$ змоделюємо впливом прямокутника потужністю $\omega(\zeta)$, апріорі більшим за ефект досліджуваного контакту; обчисливши із розв'язку прямої задачі, на якій віддалі від цього прямокутника його аномальний ефект стане меншим заданої точності ε, отримаємо бажану величину *l* Чисельний експеримент доводить, що подовження профілю ~ на $3h$ у кожен бік і фіксації кожної сублінійної ділянки Δx границі 2-3 точками достатньо для отримання розв'язку із задовільною точністю в 4.3%.

Вдосконалено класичні способи розв'язання контактної задачі (2). Спосіб Нумерова має низьку

точність і забезпечує нульове наближення $\zeta^{(0)}(x,h)$, для якого отримано оптимізовані поправки.

Теорема Андреєва. *Якщо розв'язок* $\zeta(x)$ *нелінійного інтегрального рівняння для контактної границі* (2) *належить до класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то його лінеаризоване наближення виражається у вигляді*

$$\zeta^{(n)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\,C_{n+2}^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}\left[u(\xi,0)-u(x,0)\right]d\xi\,, \qquad (11)$$

і від істинного відхиляється не більш, ніж на $h^{-2}\omega^2(\xi)$ *при* $h\to\infty$.

З глибокого аналізу формули (11) отримано наближення контакту, наступні за нульовим:

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[10h^2+(\xi-x)^2\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi,x)d\xi\,,\ \Delta u(\xi,x)=\left[u(\xi)-u(x)\right],$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi,x)d\xi\,, \qquad (12)$$

$$\zeta^{(3)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2+29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h^2)+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi,x)d\xi\,.$$

Теорема Малкіна. *Корекція кожного з лінеаризованих наближень* (12) *розв'язку* $\zeta^{(n)}(x,h)$ *рівняння* (2) *для контактної границі на величину поправки* $\zeta_1^{(n)}(x,h)=\zeta^{(n)}(x,h)+\Delta\zeta(x,h)$, *де*

$$\Delta\zeta(x,h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi\ , \qquad (13)$$

підвищує точність наступних наближень на порядок порівняно з початковими, тобто до величини $h^{-3}\omega^3(\xi)$. *Практично достатньо точне наближення поправки* $\Delta\zeta(x,h)$ *забезпечує величина*

$$\Delta\tilde{\zeta}(x,h)=u(\xi_0)\cdot\frac{\partial u(x,-h)}{\partial y},$$

де $u(\xi_0)$ *– деяке "середнє" значення поля на осі* $O\zeta_2$.

Теорема Сенька. *Уточнення кожного з лінеаризованих наближень* (12) *розв'язку* $\zeta^{(n)}(x,h)$ *рівняння (2) для контактної границі поправкою, яка визначається з лінійного інтегрального рівняння першого роду*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(n)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\zeta=v(x),\ v(x)=u(x)-\zeta^{(k)}(x,h)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2}d\xi\,, \qquad (14)$$

генерує наближення $\zeta_1^{(k)}(x,h)=\sqrt{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+\Delta\zeta(x)},k=0,1,2,3...$, *які ухилятимуться від точного роз-*

в'язку не більш, ніж на величину $\zeta_0^2\left(h^+\right)^{-3}$, $\zeta_0 = \max_x\left|\zeta(x)\right|$.

Як узагальнення класичних способів Сенька та Маловичка уточнення контакту запропоновано новий ітераційний процес, названий процесом Нумерова-Маловичка:

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x)=u(x)-\zeta_n(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi)d\xi+\Delta\zeta_n^{(m)}(x),$$

$$\Delta\zeta_n^{(0)}(x)=u(x)-\zeta_n(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi,\ n=\overline{0,\infty}, \tag{15}$$

$$\zeta_0(x)=\zeta^{(k)}(x,h),\ k=0,1,2,3\ldots m=\overline{0,\infty},\ h^-\le h\le h^+.$$

Теорема 4. *Якщо розв'язок* $\zeta(x)$, $x\in R^{(1)}$ *нелінійного рівняння* (2) *для контактної границі належить до класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$, *то послідовні наближення* $\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)+\Delta\zeta_n(x,h)$, $h^-\le h\le h^+$, *генеровані ітераційним процесом* (15)*, збігаються при* $n\to\infty$ *до граничної функції* $\zeta(x)$*, незалежної від* h*, зі швидкістю геометричної прогресії.*

Розв'язок $\zeta(x)$ лінійного інтегрального рівняння (5) відшукуємо у вигляді границі послідовно сті $\{\zeta_n(x,h)\}$, генерованої ітераційним процесом

$$\zeta_{n+1}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,h)d\xi+\zeta_n(x,h),\ \zeta_0(x,h)=u(x),\ n=\overline{0,\infty}, \tag{16}$$

який будемо називати процесом Лаврентьєва-Андреєва. Для спрощення дослідження проблем розв'язності згаданого процесу ітерацій вдамось до попереднього еквівалентного перетворення виразу (16).

Лема 1. *Якщо послідовність функцій* $\{\zeta_n(x,h)\}$*, генерована ітераційним процесом* (16)*, то еквівалентна їй послідовність генерується за допомогою послідовних наближень*

$$\zeta_n(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)^k d\omega. \tag{17}$$

Теорема 5. *Якщо послідовність функцій* $\{\zeta_n(x,h)\}$ *генерується ітераційним процесом* (16)*, то вона збігається до граничної функції* $\zeta(x,h)$*, яка задовольняє інтегральному рівнянню* (5) *із швидкістю геометричної прогресії, яка оцінюється нерівністю*

$$\left\|\zeta_{n+1}(x,h)-\zeta_n(x,h)\right\|_C\le\frac{M(h)}{h(n+2)},\ q=\frac{1}{h(n+2)}<1,\ \ де\ M(h)=\max_{x\in R^{(1)}}\left|\zeta(x,h)\right|.$$

Ця теорема стверджує існування розв'язку $\zeta(x,h)$, а швидкість збіжності спадає з наростанням глибини h і номера ітерації. Для узагальненого рівняння (4) існує узагальнений процес ітерацій Лаврентьє-

ва-Андреєва,

$$\zeta_{n+1}(x)=v(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}\zeta_n(\xi,x)d\xi+\zeta_n(x),\ \zeta_0(x)=v(x),\ n=\overline{0,\infty}, \qquad (18)$$

для якого справедливі результати, описані лемою 1 та теоремою 5, але замість h підставлено значення $\zeta(x)$ в деякій фіксованій точці $x\in R^{(2)}$.

Для змістовної практичної реалізації в рамках першого постулату альтернативи (значення поля сили тяжіння $v(x)$, $x\in R^{(1)}$ на майже "*нескінченних*" інтервалах) запропоновано ефективну схему екстраполяції значень поля за межі профілю, отриману через розклад в ряд Тейлора шуканої функції, яка входить до складу інтегралу Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{0}v(\xi,0)\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}T_o\left(\operatorname{arctg}\frac{2h}{\xi-x}\right)d\xi=w(x), \qquad (19)$$

де $w(x)=-\int_{0}^{\infty}v(\xi,0)\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}T_0\left(\operatorname{arctg}\frac{2h}{\xi-x}\right)d\xi$. Для відновлення контакту за полем, заданим на майже необмежених множинах, потрібно розв'язати два лінійні інтегральні рівняння Фредгольма 1-го роду – (19) та (16) або (18).

3. ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ ЗА ПОЛЕМ, ЗАДАНИМ НА ІСТОТНО ОБМЕЖЕНИХ МНОЖИНАХ

Описано методику вирішення лінійних інтегральних рівнянь із швидко спадаючими ядрами, призначених для відновлення контакту за полем, заданим на *істотно обмежених* профілях, проаналізовано особливості збіжності відповідних ітерацій на введеному класі Нумерова; наведено нову процедуру прискорення ітерацій. Окреслено множину коректності на основі властивостей відповідних лінійних операторів. Так, розв'язок системи (7) шукатимемо за допомогою ітераційного процесу

$$S_{n+1}^{+}(x,h)=v(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^{+}(\xi,h)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}d\xi+S_n^{+}(x,h),\ n=\overline{0,\infty}, \qquad (20)$$

$$S_{n+1}^{-}(x,h)=v(x)-\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^{-}(\xi,h)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}d\xi+S_n^{-}(x,h),\ S_0^{+}(x,h)=S_0^{-}(x,h)=v(x),$$

який надалі називатимемо *процесом Лаврентьєва-Чорного*. Так само, як і для процесу (16), вдаємось до еквівалентного зображення ітерацій.

Лема 2. *Якщо послідовність функцій* $\{S^{+}(x,h)\}$ *породжується ітераційним процесом* (20), *то еквівалентна їй послідовність генерується за допомогою послідовних наближень*

$$S_n^+(x,h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)d\xi\int_0^{\infty}\cos\omega(\xi-x)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-(\operatorname{ch}\omega h)^{-1}\right)^k d\omega. \qquad (21)$$

Теорема 6. *Якщо послідовність функцій* $\{S_n^+(x,h)\}$ *породжується ітераційним процесом* (20), *то вона збігається до граничної функції* $S^+(x,h)$, *яка задовольняє інтегральному рівнянню*

$$\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}S^+(\xi,h)d\xi=v(x),$$

зі швидкістю геометричної прогресії, яка оцінюється нерівністю

$$\left\|S_{n+1}^+(x,h)-S_n^+(x,h)\right\|_C\le\frac{M(h)}{h(2n+3)},\ \ \textit{де}\ \ M(h)=\max_{x\in R^{(1)}}\left|S^+(x,h)\right|.$$

Прямо можна довести лише збіжність наближень $\{S_n^+(x,h)\}$, оскільки нерівність $1-(\operatorname{ch}\omega h)^{-1}<1$ справедлива для будь-яких $h>0$ й $\omega>0$, а $1-(\operatorname{sh}\omega h)^{-1}<1$ виконується лише за обмеження $\omega h>0.485$, тому збіжність наближень $\{S_n^-(x,h)\}$ проілюстровано лише чисельно. Співставлення ітераційних процесів Лаврентьєва-Андреєва (16) і Лаврентьєва-Чорного (20) виявляє, що *другий процес збігається швидше за перший майже вдвічі, але їх швидкості майже однакові за порядком*. Практично процес (20) має перевагу над “андреєвським”: *завдяки швидкому затуханню по горизонталі ядер перетворень* (20) *для відновлення з певною точністю наближень* $S(x,h)$ *потрібно знати значення поля на істотно коротших профілях, ніж при використанні інтегралу Пуассона.*

Модуль неперервності оберненого оператора рівняння (20) оцінюється величиною $|\zeta(x)-\zeta_n(x)|\le\frac{N(h)}{h(2n+2)}$, де $N(h)=2\max_{x\in R^{(1)}}|v(x)+v(x,2h)|$, $v(x,2h)$ – аналітично продовжені значення $v(x)$ як гармонічної функції, з рівня $y=0$ на рівень $y=2h$. Для відшукання розв’язку узагальненого аналогу системи (7) введено узагальнений ітераційний процес Лаврентьєва-Чорного:

$$S_0^+(x)=S_0^-(x)=\zeta_0(x)=v(x),\quad S_{n+1}^+(x)=v(x)-\frac{1}{2\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^+(\xi)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}d\xi+S_n^+(x),$$

$$S_{n+1}^-(x)=v(x)-\frac{1}{2\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^-(\xi)\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}d\xi+S_n^-(x),\ \zeta_n(x)=S_n^+(x)+S_n^-(x),\ n=\overline{0,\infty}, \qquad (22)$$

для якого справедливі такі ж твердження, що описані лемою 2 й теоремою 6 для ітерацій (20). Для останнього рівняння модуль неперервності має оцінку

$$|\zeta(x)-\zeta_n(x)|\le\frac{N(h^+)}{h^-(2n+3)},\quad N(h^+)=2\max\left|W(x),W(x,2h^+)\right|,$$

де $W(x)$ – мажоранта виразу

$$W^{(n)}(x,\zeta(x)) = v^{(n)}(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k\zeta(x)}{(2k\zeta(x))^2 + (\xi - x)^2} v^{(n)}(\xi)d\xi, \quad h \in [h^-, h^+]$$

за умови $\zeta(x) = h^+ = \max_{x \in R^{(1)}}\{\zeta_k(x)\}$, а $W(x, 2h^+)$ – аналітично продовжене значення гармонічної функції $W(x)$ з рівня $y = 0$ на рівень $y = 2h^+$.

Висновок 3. Кожен з послідовності компактних операторів

$$A(v;\zeta_n, x) = v(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi - x)}{2h}\right)^{-1} d\xi + \zeta_{n-1}(x), \ n = 0,1,2,...$$

на обмеженій множині функцій $v(x)$ *майже проектує* на компакт $Nu^{(1,\alpha)}(1, D)$.

Звести до єдиного знаменника "швидкісні" характеристики ітерацій (16), (18) та (20), (22) можна, якщо прискорити збіжність двох перших. Ця процедура поліпшує чисельну стійкість алгоритмів, до яких її застосовують. Нехай деяка послідовність наближень $\{S_n(q)\}$ є функцією знаменника геометричної прогресії, $S(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q < 1$, $|S_{n+1}(q) - S_n(q)| = q^n$, а q є, власне, знаменником прогресії, наприклад $q = (h(2n+3))^{-1}$ для послідовності $\{S_n^{\varphi}(x,h)\}$ ітерацій (20). Для прискорення ітерацій пропонується така схема $S_0(q_0) = 1$, $S_{n+1}(q_n) = S_n(q_{n-1})(1 + q_n + q_n^2 + ... + q_n^{m-1})$, $q_n = q_{n-1}^m = q^{m^n}$. Для ітерацій (17) отримаємо "прискорені" наближення у вигляді

$$\zeta_{n+1}(x,h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v_n(\xi,h)d\xi \int_0^{\infty} \cos\omega(\xi - x)(1 + q_n(\omega))d\omega, \tag{23}$$

$$q_n(\omega) = q_{n-1}^2(\omega) = ... = q_0^{2^n}(\omega), \ q_0(\omega) = q(\omega), \ n = \overline{0,\infty}.$$

Цю схему легко поширити на інші ітераційні процеси. Збіжність наближень (23) описує теорема.

Т е о р е м а 7. *Процес послідовних наближень* (23) *збігається до функції* $\zeta(x,h)$, $x \in R^{(1)}$, $h > 0$ *зі швидкістю* $|\zeta_{n+1}(x,h) - \zeta_n(x,h)| \le \dfrac{M(h)}{h(2^n + 1)}$, $M(h) = 2\max|\zeta(x,h)|$.

Досліджено стійкість розв'язків поставленої задачі на визначеному класі розв'язків.

Т е о р е м а 8. *Якщо за малого* $\varepsilon > 0$ *поля, породжені "паралельними" контактами з класу* $Nu_2^{(1,\alpha)}(1, D)$, *незначно ухиляються одне від одного в смислі нерівності* $\|u_1(x) - u_2(x)\|_C < \varepsilon$, *то самі границі незначно відрізняються одна від одної за умовою* $\|\zeta_1(x) - \zeta_2(x)\|_C \le \delta\varepsilon$, *де* $\delta = f(h^-, h^+)$.

4. ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ НА ОБМЕЖЕНИХ МНОЖИНАХ

Окреслено загальну стратегію вирішення некоректних задач, здійснено алгебраїзацію пропонованих алгоритмів і наведено, у рамках регуляризації за Тихоновим, методику чисельного розв'язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, до вирішення якого зведено всі досліджувані процеси. Подано результати чисельного тестування на комп'ютері та порівняльного аналізу тестових прикладів, отриманих за різними алгоритмами. Описано програму обчислень на комп'ютері наближених розв'язків поставленої задачі на рівномірній мережі вузлів.

Характеристики прямих операторів $A(\zeta, x)$ задачі

$$\mathbf{A}\zeta \equiv \int_{c_1}^{c_2} K(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi = u(x),\ c_0 \le x \le c_3 \qquad (24)$$

дозволяють, в разі точного задання його та правої частини, без проблем будувати таку послідовність компактних операторів, яка збігається на певному елементі класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$ до точного розв'язку. Через нестійкість оберненого оператора потрібно вносити корективи в цю стратегію.

Скінченновимірну апроксимацію системи (24) здійснено методом *проекцій.* Це дозволяє зменшити розмірність системи, оскільки вхідна матриця симетрична і додатно визначена. В підсумку для операторів рівнянь (16) і (20) відповідно маємо:

$$A_m^P(h,x) \equiv P_m\ A^P(h,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-a_m}^{a_m} \frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2}\zeta_n(\xi,h,m)d\xi\,,$$

$$A_m^S(h,x) \equiv P_m\ A^S(h,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a_m}^{a_m} \left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi(\xi - x)}{2h}\right)^{-1} \zeta(\xi,h,m)d\xi\,. \qquad (25)$$

Похибки апроксимації операторів $A(\zeta, x)$ операторами $A_m(\zeta, x)$ оцінюються, відповідно, як

$$\left\|\varepsilon^P(x,a_m)\right\|_C = \frac{1}{\pi}\left|\int_{a_m}^{\infty} \frac{h^+}{(\xi - x)^2 + (h^-)^2}\,d\xi\right|,\ \left\|\varepsilon^S(x,a_m)\right\|_C = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{a_m}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi(\xi - x)}{2h^+}\right)^{-1} d\xi\right|.$$

З цих оцінок знаходять межі інтегрування a_m і за формулою Гауса 7-го ступеня точності (12 вузлів) здійснюють чисельне інтегрування. По завершенню дискретизації оператора $A_m\left(\zeta^{\alpha_0}; x, \varepsilon\right)$ отримуємо відносно шуканого вектора розв'язку $\vec{\zeta}(x_n)_{n=1}^m$ такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\zeta(x_i) - \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{2n-1}\gamma_i \sum_{j=1}^{m}\frac{\zeta(x_i)}{\zeta^2(x_i) + (\xi_j - x_i)^2}\zeta(\xi_j) = \sum_{j=1}^{m} u(x_i),$$

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\zeta(x_i)-\frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{2n-1}\gamma_i\sum_{j=1}^{m}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi_j-x_i)}{2\zeta(x_i)}\right)^{-1}\zeta(\xi_j)=\sum_{j=1}^{m}u(x_i). \qquad (26)$$

В ході регуляризації за Тихоновим ця система редукується до вирішення рівняння Ейлера

$$\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(x_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\gamma(x_i)K_\delta(x_i,\xi_k)K_\delta(x_i,\xi_j)\zeta(\xi_j)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i K_\delta(x_i,\xi_k)u_\delta(x_i) \qquad (28)$$

за умов застосування квадратур Гауса $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i)+R(f_n)$. Розв'язуючи цю систему для ряду значень $\alpha=C\delta^2$, $C=\sum_{i=0}^{5}10^{-i}$, знаходимо шуканий розв'язок $\zeta_{\alpha_i}(x_k)_{k=1}^{m}$. Оптимізація розв'язків із знаходженням α_{opt} для модельних прикладів не проводилась. Модельне поле, яке фігурує в правій частині всіх алгоритмів, отримане внаслідок розв'язання прямої задачі, тобто обчислення поля, генерованого модельним контактом типу Іванова:

$$\zeta(x_i)=\begin{cases}h_1+\sum_{i=1}^{n}\left\{a(1-x_i^2)^2+b\sin k\pi x_i\right\},\ i\in[c_0,c_3]\\ h_1 \qquad\qquad\qquad\qquad ,\ i\notin[c_0,c_3]\end{cases}, \qquad (29)$$

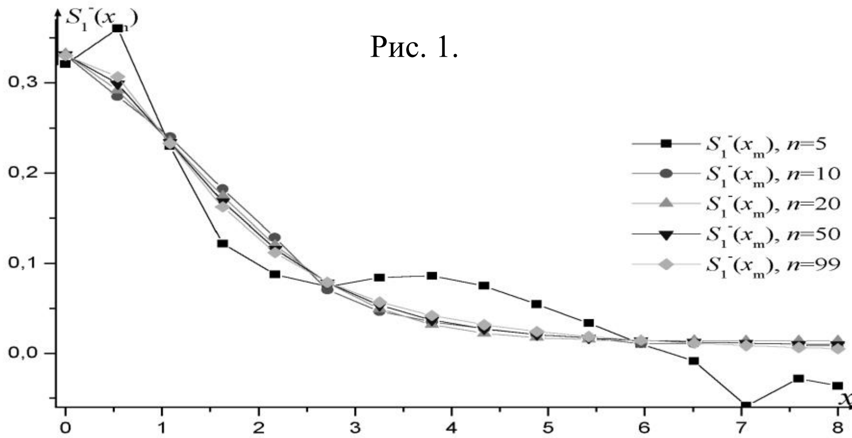


Рис. 1.

Значення отриманого поля, збурені 5%-ним шумом, служать вхідними даними для вирішення оберненої задачі. Під час тестування вивчено чисельну збіжність другого рівняння системи (7) (рис. 1) та поведінку інтегральних ядер (6). Останні нерівнозначні за точністю і швидкодією

Працездатність алгоритмів (16), (18) проілюстровано на модельних прикладах з параметрами: довжина профілю $l\in[c_0,c_3]\equiv[-1,1]=2$ *км*; крок $\Delta x=0.1$ *км*, коливання контакту $-1{,}6\le\zeta(x)\le-1{,}4$ *км*; перепад густини $\sigma=0.3$ *г/см*^{3}; апріорна глибина контакту $h=1{,}2$*км*; амплітудні величини $a=b=1$; $x_i=(-1.4+i\Delta x)$; $n=15,\ k_d=2,\ h=1.0,\ \varphi=h_1=k=a=b=1,\ \Delta x=0{,}133,\ \Delta\zeta=0{,}066,\ \delta=10^{-5}$.

Тестування здійснено так: для заданих точних розв'язків $\zeta_T(\xi)$ і ядер $K_T(x,\xi)$ розраховують аналітично або чисельно праві частини $u_T(x)$, потім вносять в них випадкові похибки (нормальний розподіл), а точні ядра замінюють наближеними $K_\delta(x,\xi)$ тієї ж гладкості з точністю

$\varepsilon = \sqrt{\int_{c_1}^{c_2} [K_\delta(x) - K(x)]^2 dx}$. З цими даними вирішено два модельні приклади:

1. Модельне рівняння $\int_{c_0}^{c_3} K(x,\xi)\zeta(\xi)d\xi = u(x),\ c_1 \le x \le c_2$, точний розв'язок $\zeta(\xi) \approx \begin{cases} (1-\xi^2)^2, & |\xi| \le 1 \\ 0, & |\xi| \ge 1 \end{cases}$, точне ядро $K(x,h) = e^{-x^2}$, при цьому $[c_0, c_3] = [-1.4, 1.4]$, $n = 29$, $\Delta x = 0.1$, $[c_1, c_2] = [-1, 1]$, порядок регуляризації – нульовий (гладкі функції контакту, правої частини, їх майже однакова ефективна ширина)

2. Все те саме, але точне ядро $K(x,h) = \sqrt{4/\pi}e^{-4x^2}$, що означає внесену похибку оператора $\varepsilon \approx 0.12$ (тобто $\varepsilon_{\text{отн}} \approx 12.5\%$). За такої похибки складно знайти шукану функцію $\zeta(x)$.

Ітерації закінчують по досягненні заданої середньоквадратичної нев'язки чи по виконанні заданої кількості кроків ітерації. Похибки отриманих розв'язків не перевищують заданих неточностей поля. Порівняння розроблених в роботі і відомих класичних алгоритмів Чорної, Нумерова, Маловичка виявило більшу ефективність алгоритмів Лаврентьєва-Андреєва, Лаврентьєва-Чорного порівняно з класичними схемами, зумовлену кращим ступенем обумовленості систем алгебраїчних рівнянь. Чисельні експерименти виявили перевагу алгоритму (16) за точністю над розв'язком (2) Чорної майже удвічі, а (20) – майже утричі. З ітераціями на основі рівнянь (8), (9) можна досягти таких же результатів при вдвічі меншому обсязі обчислень (рис. 2). Дослідження представляють перш за все науковий інтерес, але алгоритми можна застосувати у складі автоматизованих систем для моделювання і експрес-аналізу гравіметричних даних на маловивчених територіях нескладної будови.

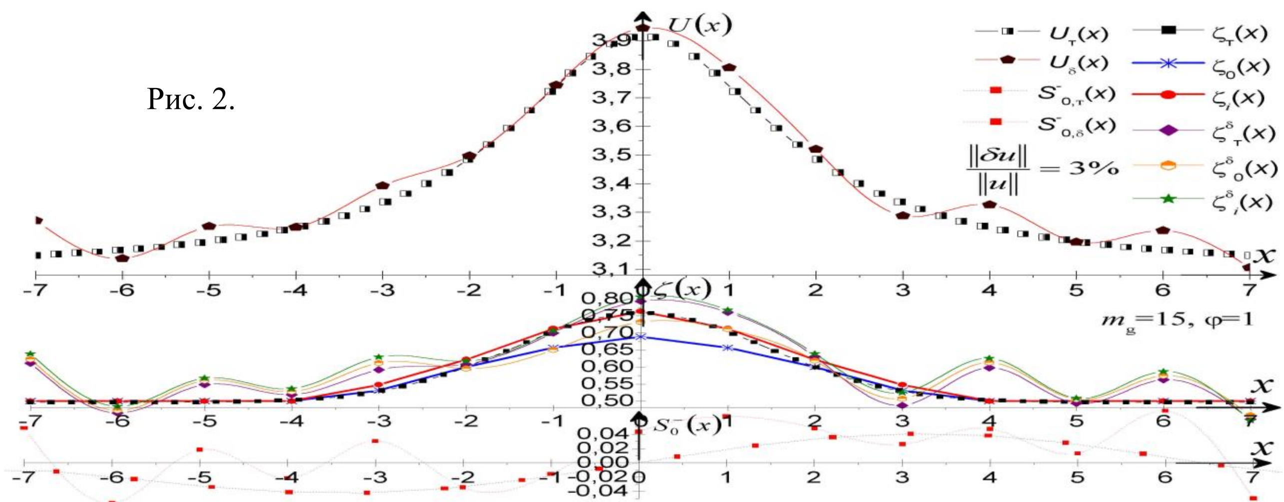


Рис. 2.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

У дисертації наведено *теоретичне узагальнення* і нове вирішення оберненої задачі потенціалу для контактної границі в лінеаризованій постановці. Головні наукові і практичні досягнення роботи:

1°. Описано математичну модель задачі відновлення контакту на класі Нумерова за вертикальними похідними логарифмічного потенціалу у вигляді розв'язків лінеаризованих інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду. В їх узагальнених модифікаціях усунута залежність розв'язків від апріорі невідомого параметра h — *середньої глибини* до контакту. Доведено існування і єдиність розв'язків на компактному класі єдиності $Nu^{(1,\alpha)}(1,D)$. Модель задачі поширюється на магнітоактивні контакти.

2°. Доведено, що відомі алгоритми, які базуються на виразах з інтегральним ядром Пуассона, не забезпечують прийнятної точності відновлення контакту за полем, заданим на коротких профілях, які властиві практиці спостережень. Для випадку задання значень поля на *істотно короткому* профілі для визначення контактної границі $\zeta(x)$ запропоновано кілька алгоритмів, що базуються на інтегральних рівняннях із швидкозбіжним ядром типу Шварца. На основі рівнянь з ядрами Пуассона і Шварца введено два різних типи задач для відновлення контакту (з параметром h та без нього). Вивчено структуру класу єдиності зазначених рівнянь. Доведено умовну коректність контактної задачі.

3°. Для розв'язання рівнянь кожного типу задач запропоновано збіжні ітераційні процеси Лаврентьєва-Андреєва (16) і Лаврентьєва-Чорного (20) та їх узагальнені аналоги (18) і (22). Практичною перевагою ітерацій (20), (22) є швидша збіжність та можливість задання значень контакту на *короткому* профілі. Збіжність усіх ітерацій обґрунтовано за новим способом, що базується на еквівалентному зображенні підінтегральних виразів в ітераційних процесах через узагальнені функції.

4°. В ході дослідження вищезгаданих ітерацій поліпшено ітераційні способи уточнення нумерівського наближення контакту, пропоновані свого часу Андреєвим, Малкіним і Сеньком, введено новий спосіб *Нумерова-Маловичка* і обґрунтовано стійкість уточнень. Їх можна використати для аналітичних апроксимацій поля в автоматизованих системах інтерпретації.

5°. Надійне визначення контакту на довгих профілях забезпечене ефективним способом екстраполяції значень поля за межі профілю (на основі розкладу вищих похідних відомого інтеграла Пуассона в ряд Тейлора), який зведено до розв'язання лінійного рівняння 1-го роду (19). Надійність обчислень підвищено ефективним способом прискорення збіжності ітерацій на підставі математичних характеристик їх збіжності.

6°. Для чисельного вирішення задачі розроблено регуляризуючі алгоритми на базі концепції регуляризації Тихонова. Модернізовано знаходження оптимального параметра регуляризації α_0, мінімізовано похибки округлень. Створено пакет програм і перевірено на тестових задачах. Порівняння чисельних розв'язків довело перевагу алгоритму (20) над алгоритмом (16). Досягнута точність розв'язку $\varepsilon_\zeta \approx 10^{-5}$ при похибках оператора $\varepsilon_A \approx 10^{-4}$ і спостережень $\delta \approx 10^{-4}$ прийнятна для застосувань.

Основні положення дисертації опубліковано в наступних роботах:

1. Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофіз. журн. – 2002. – **24**, № 3. – С. 77-92 (співавтор А.В. Чорний).

2. До теорії структурної задачі гравіметрії в комплексній площині // Доп. НАН України. – 2002, № 4. – С. 145-149 (співавтор А.В. Чорний).

3. Відновлення контактної границі в шаруватому середовищі // Геофіз. журн. – 2002. – 24, № 6. – С. 36-41.

4. Уточнення деяких способів наближеного визначення контактної межі // Доп. НАН України. – 2002, № 12. – С. 99-103 (співавтор А.В. Чорний).

5. Линейная граничная задача восстановления контакта по значениям поля, заданного на существенно ограниченных множествах // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 28-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского, Киев, 29 января – 2 февраля 2001 г. – Москва: ОИФЗ РАН, 2001 г., – С. 35-36.

6. Про структурну задачу гравіметрії // Геофізичний моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану геологічного середовища: Матеріали ІІ-ої Міжнародної конференції для молодих вчених, Київ, 8–10 жовтня 2001 р. – Київ: Видавництво КУ, 2001 р., – С. 60-61 (співавтор А.В. Чорний).

Дубовенко Ю.И. Определение контактной границы по значениям производных логарифмического потенциала на существенно ограниченных множествах. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 04.00.22 – геофизика. – Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев, 2004.

Диссертация посвящена разработке теории и алгоритмов решения задачи восстановления контактной границы при условии, что поле представлено значениями производных логарифмического потенциала, заданными как на неограниченных так и на существенно ограниченных профилях. Исследованы основные математические модели обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности. Отмечено, что параметрическая зависимость решения задачи от плотности активного слоя и от *средней глубины* или асимптоты контакта есть следствие рассматриваемых моделей слоистой среды, а не принципиальной характеристикой задачи для неограниченных тел в отличие от задачи для тел ограниченных. В случае задания поля на длинном профиле предложена эффективная схема экстраполяции значений поля за пределы профиля на основе представления искомой функции разложением в ряд Тейлора, а также экономичная схема ускорения сходимости итерационных процессов на основе геометрических характеристик их сходимости. Для поля, заданного на *ограниченных множествах*, обоснован ряд предложенных способов восстановления контактной границы как граничных функций последовательностей решений линейных интегральных уравнений первого рода с компактными операторами, имеющими быстро спадающие интегральные ядра типа Шварца. Моделирование поведения быстро спадающих ядер показало, что точность вычисления контакта зависит не только от погрешностей поля, но и от длины интервала его задания. Установлена корект-

ность решения полученных уравнений на специально введенном классе Нумерова и разработан регуляризирующий алгоритм с повышеной численной устойчивостью. Определен минимальный существенно ограниченный интервал для надежного восстановления контакта, зависящий от соотношения длин профиля поля и восстанавливаемого контакта. Осуществлена серия численных экспериментов для изучения влияния погрешностей на дискретные аналоги полученных алгоритмов. Разработанная теория без ограничений распространяется на трехмерное пространство и на случай нескольких контактных поверхностей, а также применима и при переменной плотности осадочных слоев.

Ключевые слова: логарифмический потенциал, контактная граница, обратная задача гравиметрии, интегральное уравнение, регуляризирующий алгоритм, итерация, ускорение сходимости, приближение.

Дубовенко Ю.І. Визначення контактної границі за значеннями похідних логарифмічного потенціалу на істотно обмежених множинах. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 04.00.22 – геофізика. – Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, 2004.

Дисертація присвячена розробці теорії та алгоритмів розв’язання задачі відновлення контактної границі за умови, що поле представлено значеннями похідних логарифмічного потенціалу, заданими як на необмежених, так і на істотно обмежених профілях. В разі поля першого типу запропоновано ефективні схеми екстраполяції значень поля за межі профілю та прискорення збіжності ітераційних процесів. Для поля, заданого на обмежених множинах, обґрунтовується ряд запропонованих способів відновлення контактної границі як граничних функцій послідовностей розв’язків лінійних інтегральних рівнянь першого роду з компактними операторами, що мають інтегральні ядра типу Шварца, які швидко спадають. Встановлено коректність розв’язання отриманих рівнянь на спеціально введеному класі Нумерова та розроблено регуляризуючий алгоритм з підвищеною чисельною стійкістю.

Ключові слова: логарифмічний потенціал, контактна границя, обернена задача гравіметрії, інтегральне рівняння, регуляризуючий алгоритм, ітерація, прискорення збіжності, наближення.

Dubovenko Yu.I. Contact interfaces definition by the inversion of the logarithm potential derivatives given on the essentially restricted sets. – Manuscript.

Thesis for a candidate’s degree by speciality 04.00.22 – geophysics. – Institute of Geophysics by the S.I. Subbotin name, NAS of Ukraine, Kiyiv, 2004.

The theses for a candidate’s degree are devoted to development of a theory and algorithms concerned with the problem for contact interface recovery provided that the gravity field is represented by the logarithm potential derivatives values given as on the infinited profiles as on the essentially restricted ones. In case of first type field the effective schemes for field values extrapolation beyond the profile limits and acceleration of iteration convergency have been proposed. As for the field, received on the restricted sets, for the contact border renovation the series of methods proposed treated as limit functions of the succession of the solutions of 1st kind linear integral equations with compact operators having the fast decreasing integral cores of Schwarz’s type are substantiated. A correctness of received equations solutions is established on the specially introduced Numerov class and regularising algorithm with enforced numerical stability is set up.

Key words: logarithm potential, contact interface, gravity inversion, integral equation, regularising algorithm, iteration, convergency acceleration, approximation.